

# Název: Jak přesné je „přesné“ měření (Proč nám ve fyzice jedno měření nestačí?)

**Téma: Statistické vyhodnocování naměřených výsledků**

**Úroveň: střední škola**

**Tematický celek: Obecné zákonitosti přírodovědných disciplín a principy poznání ve vědě**

**Předmět (obor): fyzika**

**Doporučený věk žáků: třídy čtyřletého gymnázia nebo vyšší stupeň víceletého gymnázia**

**Doba trvání: 2 vyučovací hodiny**

**Specifický cíl: naučit žáky základní zákonitosti a důležitost statistického zpracování naměřených výsledků z fyzikálních experimentů**

## **Seznam potřebného materiálu:**

Pomůcky a materiál pro každou skupinu:

Laboratorní stojan, pevný tenký provázek, nůžky, závaží s háčkem, svinovací metr, digitální stopky, počítač s tabulkovým procesorem

Pomůcky a materiál pro lektora:

Počítač s tabulkovým procesorem, projektor

## **Seznam praktických (badatelských) aktivit:**

Sestavení matematického kyvadla

„Co nejpřesnější“ změření doby trvání jediného kmitu kyvadla

Opakované určení periody kmitů kyvadla z měření o různých počtech kmitů

Zkoumání závislosti rozptylu zjištěných hodnot periody kmitů kyvadla na počtu opakování měření

## Anotace:

Přesnost získaných výsledků fyzikálních měření je často ovlivněna řadou náhodných vlivů. Při opakovaných měřeních například času či vzdálenosti se jejich výsledky mohou vzájemně lišit.

Aktivita je zaměřena na zkoumání rozptylu výsledků při opakovaných měřeních periody kmitů matematického kyvadla. Žáci prozkoumají, jak je možno upřesnit získaný výsledek měřením doby více kmitů či vícenásobným opakováním měření, i to, jak moc má smysl tyto počty zvětšovat.

## Harmonogram vyučuy:

	náplň práce	čas	potřebné vybavení a pomůcky	činnost učitele	činnosti žáků
Úvod do tématu – motivace	Motivační pokus „Změř co nejpřesněji periodu kmitů kyvadla“	10 min.	Laboratorní stojany, pevná nit, 50g závaží s háčkem, svinovací metr, stopky, pracovní listy	Učitel nabádá žáky, aby změřili dobu jednoho kmitu kyvadla co nejpřesněji. Povzbuzuje je v jejich marném snažení.	Žáci sestavují kyvadlo, měří stopkami dobu jednoho kmitu matematického kyvadla.
Předlaboratorní příprava	Návrh vhodné metody zpřesnění výsledků	10 min.	Pracovní listy	Vede řízenou diskusi o návrhu vhodné metody.	Navrhují vhodnou metodu.
Praktická (badatelská) činnost	Získání dat pro badatelskou činnost	40 min.	Pracovní listy, matematické kyvadlo, PC s tabulkovým procesorem	Pomáhá při získávání dat.	Žáci měří dobu trvání různého počtu kmitů kyvadla.
Vyhodnocení výsledků	Zpracování a vyhodnocení výsledků v tabulkovém procesoru	20 min.	Počítač, tabulkový procesor, naměřené hodnoty	Učitel pomáhá žákům při zpracování hodnot v tabulkovém procesoru.	Porovnávají rozptyly zjištěných period jednoho kmitu při různých počtech opakování měření.
Prezentace výsledků	Porovnání objevených závislostí	10 min.	Pracovní listy, počítač, případně projektor	Dozor při prezentování výsledků žáků. Z časových důvodů možno zařadit do běžné hodiny.	Žáci vzájemně prezentují výsledky a závislosti, které objevili.

Domácí úkol pro žáky: Není.

# Přípravy pro učitele

---

## **Motivace a předlaboratorní příprava:**

V úvodu aktivity lektor přečte motivační text. Před samotným experimentováním je dobré žákům připomenout základní pojmy týkající se matematického kyvadla (frekvence, perioda, kyv, kmit) a případně i základy práce v tabulkovém procesoru, jako jsou vkládání jednoduchých funkcí a práce s jednoduchými vzorci. Žáky je z časových důvodů možno poučit v některé z předchozích vyučovacích hodin.

## **Motivační text:**

K měření času se po dlouhou dobu používala doba kmitu kyvadla kyvadlových hodin. Ve své době byly kyvadlové hodiny ty nejpřesnější ze všech. Proto bylo nutné znát periodu kmitů co nejpřesněji. Zjistit tuto dobu bez moderního vybavení není jednoduchá věc. Přesto to fyzikové už v dávné minulosti uměli a stejnou metodou zjišťovali hodnoty i jiných fyzikálních veličin s velikou přesností. Dnes se k přesnému určení času používají atomové hodiny a přesné hodnoty fyzikálních veličin se dají zjistit drahými měřicími přístroji. Ne vždy se však najde další uplatnění pro tyto přístroje, a proto je vhodné porozumět metodě, kterou používají matematici a fyzici již stovky let.

## **Poznámky pro učitele:**

Nejprve žáky rozdělíme do skupin, nejlépe do dvojic, pokud to počet pomůcek dovolí. Poté žákům rozdáme pracovní listy a ponecháme jim čas na seznámení s nimi. Během toho rozdáme žákům laboratorní stojany, závaží, nůžky, pevnou nit, svinovací metr a stopky. Žáci začnou vypracovávat první úkol – pokusí se změřit co nejpřesněji dobu jednoho kmitu – periodu matematického kyvadla.

**Úkol č. 1:** Sestavte matematické kyvadlo a změřte stopkami opakovaně (desetkrát) dobu jednoho kmitu  $T$  (periodu) matematického kyvadla.

## **Návod na sestavení matematického kyvadla:**

Vezměte vysoký laboratorní stojan. Upevněte na něj co nejvýše svorku a do ní upevněte jednoduchý držák byrety. Do držáku uchyťte svisle naříznutou gumovou zátku. Do zářezu vložte pevnou nit dlouhou asi 80 cm. Na druhém konci nitě udělejte malé očko. Na očko pověste 50 g závaží s háčkem. Pomocí svinovacího metru změřte délku závěsu (od středu závaží – těžiště až k místu, kde provázek končí u zátky). Nastavte délku závěsu přibližně na 60 cm. Závaží vychylujte při opakovaných měřeních z rovnovážné polohy pokud možno o stejný úhel.

Liší se jednotlivé naměřené hodnoty doby jednoho kmitu od sebe? O kolik procent asi?

Žáci se pokusí několikrát změřit dobu pouze jednoho kmitu. Brzy ale zjistí, že změřit opakovaně přesně stejnou hodnotu je nadlidský úkol.

Co všechno má vliv na změřenou dobu kmitu? Napište co nejvíce faktorů, které mohou měření ovlivnit.

Dá se očekávat, že žáci vymyslí následující hypotézy:

- reakční doba člověka (zpožděný stisk tlačítka stopek)
- chyba „odečtení“ polohy kyvadla
- různé maximální výchylky kyvadla při opakovaných měřeních
- proudění vzduchu v učebně
- nedokonalost (pružnost) závěsu a stojanu
- ...

Předmětem aktivity není ověřování těchto hypotéz. Jejich vymyšlení zde slouží k tomu, aby si žáci uvědomili, že změřená doba kmitu kyvadla podléhá celé řadě náhodných vlivů – je náhodnou veličinou.

Kterou hodnotu byste prohlásili za tu správnou? Proč?

Potřeba vybrat jednu hodnotu z mnoha naměřených přivede žáky k jednoduchému kroku. Porovnájí hodnoty a jako správnou určí průměrnou hodnotu. Nevědomky tak provedou odhad střední hodnoty aritmetickým průměrem.

Byla by tímto způsobem určená hodnota stejná i v případě dalších deseti měření?

Jelikož jsou naměřené hodnoty doby kmitu kyvadla náhodnou veličinou, je i aritmetický průměr z nich také náhodnou veličinou. V případě dalších sérií deseti měření se tedy vypočítané aritmetické průměry mohou od sebe lišit. Ovšem, jak později uvidíme, mnohem méně než jsou rozdíly u jednotlivých měření dob jednoho kmitu kyvadla.

Navrhňte způsob, jak byste určili skutečnou dobu kmitu matematického kyvadla co nejpřesněji. Zapište všechny metody, které vás napadly.

Žáci znají aritmetický průměr, a proto se jím budou jistě inspirovat. Měli by se dostat s největší pravděpodobností k těmto třem možnostem:

- změřit dobu více kmitů a následně ji vydělit počtem kmitů
- změřit vícekrát dobu jednoho kmitu a následně ji zprůměrovat
- použít moderní zařízení pro omezení náhodných vlivů – např. optické závory a PC

K vymyšlení různých metod zjištění správné hodnoty periody je vhodné zkusit metodu sám, ve dvojici a celá třída. Kdyby se žákům nepodařilo přijít na tyto možnosti do 5 minut, je vhodné, aby je lektor na tyto možnosti navedl.

Předpokládejme nyní, že stejně jako fyzikové z dob novověku nemáme k dispozici takové vybavení jako je optická závora, a proto se budeme muset bez něj obejít. Pouze si ulehčíme výpočty pomocí počítače s tabulkovým procesorem.

**Úkol č. 2:** Sestavte matematické kyvadlo (viz úkol č. 1) a změřte pomocí digitálních stopek postupně desetkrát dobu jednoho, dvou, pěti, deseti a dvaceti kmitů matematického kyvadla. Hodnoty zaznamenejte do tabulky nebo přímo do počítače s tabulkovým procesorem.

Č. měření	doba n-kmitů				
N	$t_1$ [ s ]	$t_2$ [ s ]	$t_5$ [ s ]	$t_{10}$ [ s ]	$t_{20}$ [ s ]
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

*Poznámka:* Jestliže se rozhodnete provést celou úlohu formou dvouhodinovky, je vhodné zaznamenávat naměřené hodnoty přímo do tabulkového editoru v PC. Jestliže se rozhodnete měření provést formou dvou oddělených vyučovacích hodin, mohou žáci tabulku připravit za domácí úkol a naměřená data do ní z pracovního listu přepsat.

Když jste se rozhodovali v předchozím úkolu, jakou hodnotu periody z opakovaných měření zvolíte jako tu správnou, použili jste pravděpodobně (ať vědomě či nevědomě) aritmetický průměr.

Naměřená hodnota doby kmitu kyvadla podléhá celé řadě náhodných vlivů. Popisovali jste je v úkolu č. 1. Pokud předpokládáme, že tyto vlivy způsobují „stejně dobře“ jak kladné tak i záporné odchylky od skutečné periody kyvadla, můžeme tuto periodu (*střední hodnotu*) odhadnout právě aritmetickým průměrem z naměřených hodnot.

Pomocí počítače s tabulkovým procesorem vytvořte nejdříve druhou tabulku, kde získané časy různých počtů kmitů ( $t_1, t_2 \dots$ ) přepočítáte na doby jednoho kmitu  $T$ . Dále pracujte s touto tabulkou.

Poté určete aritmetické průměry hodnot doby jednoho kmitu získaných z měření při různých počtech kmitů (v Excelu můžete využít funkci =PRŮMĚR() ).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Aritmetickým průměrem nestanovíme střední hodnotu („nenajdeme tu správnou“). Pouze ji odhadneme. Jak přesně jsme ji odhadli, nám pomůže objasnit odchylka od průměru.

Zkuste nyní od všech hodnot doby jednoho kmitu v některém vybraném sloupci tabulky (které náleží měření se stejným počtem kmitů) odečíst již vypočítaný aritmetický průměr z tohoto sloupce. Získáte tzv. *odchylky od aritmetického průměru*. Jaká mají znaménka?

Zkuste nejdříve předpovědět, jaký je jejich součet. Výsledek pak ověřte výpočtem v tabulkovém procesoru (v Excelu můžete využít funkci =SUMA() ).

Odchylky od aritmetického průměru mohou být kladné i záporné, jejich součet (pozor na případné zaokrouhlování) je roven nule.

To, jak daleko jsou „rozházené“ naměřené hodnoty od té střední, můžeme jedním číslem popsat veličinou zvanou *výběrový rozptyl*. Nalezněte ji v tabulkovém procesoru (v Excelu =VAR.VÝBĚR() ) a použijte ji na doby jednoho kmitu matematického kyvadla pro každý sloupec tabulky zvlášť. Nebo můžete použít odchylky od průměru a vypočítat rozptyl podle následujícího vztahu. (Závorky v čitateli bez druhé mocniny jsou právě odchylky od průměru.)

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Častěji než výběrový rozptyl se pro popis „rozházenosti“ naměřených hodnot používá *výběrová směrodatná odchylka* (v Excelu =SMODCH.VÝBĚR() ). Použijte ji opět na doby jednoho kmitu matematického kyvadla pro každý sloupec tabulky zvlášť. Můžete ji také určit podle vztahu:

$$s = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

**Příklad vyhodnocení výsledků:**

Příklad vyhodnocení naměřených dat v tabulkovém procesoru z měření ukazuje následující tabulka. Zde bylo měření realizováno s použitím jednoduchých pomůcek (viz dále Závěrečné poznámky) – špejle, nitě a matice M6.

Doba n-kmitů v sekundách:			Přepočítané hodnoty na 1 kmit		
1 kmit	2 kmity	5 kmitů			
1,63	3,06	7,66	1,63	1,530	1,532
1,60	3,03	7,75	1,60	1,515	1,550
1,57	3,09	7,62	1,57	1,545	1,524
1,50	3,00	7,59	1,50	1,500	1,518
1,53	3,12	7,53	1,53	1,560	1,506
1,47	3,19	7,52	1,47	1,595	1,504
1,47	3,10	7,50	1,47	1,550	1,500
1,50	3,07	7,62	1,50	1,535	1,524
1,47	3,15	7,50	1,47	1,575	1,500
1,46	3,00	7,59	1,46	1,500	1,518
Průměr:			1,520	1,541	1,518
Rozptyl:			0,003667	0,000969	0,000253
Směrodatná odchylka:			0,061	0,031	0,016

Je vidět, že s rostoucím počtem kmitů klesá vypočítaná výběrová směrodatná odchylka – číslo odhadující (podobně jako u aritmetického průměru) „rozházenost“ zjištěných hodnot doby jednoho kmitu od její střední hodnoty.

## Závěrečné poznámky

### Jiné varianty a další možné úpravy či doporučení

Úlohu je možno z časových důvodů provést odděleně ve dvou samostatných částech.

Žáky je třeba upozornit na dodržování stejných podmínek při spouštění kyvadla, pro účel této aktivity není třeba dodržovat malou amplitudu kmitů.

Úlohu je možno realizovat i improvizovaně s jednoduchými pomůckami – místo stojanu poslouží špejle s naříznutým koncem, do kterého se zasune rezná nit. Na ní je na druhém konci uvázaná matice (např. M6). Špejli položíme přes hranu stolu a zatížíme knihou nebo jiným těžkým předmětem. Rozptyl naměřených hodnot v tomto uspořádání bude trochu větší než u pevného stojanu s těžším závažím.

### Reflexe po hodině

Žáci neměli problém s používáním obyčejných elektronických stopek. Bez problémů 10× naměřili dobu trvání jednoho, dvou, tří, pěti a deseti kmitů kyvadla. Aktivita dobře „funguje“ i s jednoduchými pomůckami – viz výše.

Použitím jednoduchých vzorců v Excelu žáci přepočítali naměřené doby na dobu trvání jednoho kmitu a pomocí funkcí v Excelu vypočítali z takto získaných period výběrové směrodatné odchylky.

Žákům se aktivita líbila, užili si jak vytváření kyvadla, tak i samotné měření a samostatné vyhodnocení výsledků.

Na samotné experimentování a badatelskou činnost žáků nelze vymezit při konkrétním zadání přesný čas. Žáci mají různé schopnosti a praktické zkušenosti a přistupují k experimentu s různou mírou poctivosti. Lektor musí naopak rozsah zadání (počet měření atd.) průběžně přizpůsobovat dostupnému času.

### Navazující a rozšiřující aktivity

Postup „objevený“ v této aktivitě lze aplikovat i na měření jiných veličin – např. průměru drátu (namotat různé počty závitů drátu na tyč a změřit délku vinutí posuvným měřidlem) nebo objemu kapky vody kapající z kohoutku (odměřovat objem vody v kádince získaný při různém počtu kapek).